

**АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ
ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»
(АНОО ВО «УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»)**

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Теория вероятностей и математическая статистика

Уровень образования:	высшее образование – программа магистратуры
Направление подготовки:	06.04.01 Биология 09.04.03 Прикладная информатика
Направленность (профиль):	Биоинформатика

АНОО ВО «Университет «Сириус»	Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика»	Лист 2 Листов 9
-------------------------------	--	--------------------

1. Общая характеристика дисциплины (модуля)

1.1. Цель: формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков численных методов и методов оптимизации для решения различных прикладных задач математической биологии и биоинформатики.

1.2. Задачи: развитие у студентов математического мышления, умения ставить, исследовать и решать сложные задачи прикладной математики и информатики.

1.3. Общая трудоемкость: 3 з.е.

1.4. Планируемые результаты обучения:

Формируемые компетенции (код компетенции, формулировка)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю) (индикаторы достижения компетенций)
ПК-1. Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики.	ИПК-1.1. Применяет основы фундаментальных математических, биологических дисциплин и других естественных наук.
	ИПК-1.2. Формулирует, анализирует и решает профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, биологии и других естественных наук.
	ИПК-1.3. Применяет практический опыт постановки и решения актуальных задач математической биологии и других наук.
ПК-5. Способен применять методы математического и компьютерного исследования при разработке интеграционных решений на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных наук и навыками проблемно-задачной формы представления научных знаний.	ИПК-5.1. Применяет теоретические основы фундаментальных методов исследования научных проблем.
	ИПК-5.2. Применяет полученные знания для анализа объекта исследования, определения целей и задач исследования, а также выбора корректного метода исследования научной проблемы.
	ИПК-5.3. Решает научные задачи в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой.

2. Структура и содержание дисциплины (модуля)

2.1. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной деятельности:

Виды учебной деятельности	1 семестр	Всего
Контактная работа обучающихся с преподавателем, всего ч.	66	66
Лекционные занятия, ч.	х	х
Практические (семинарские) занятия, ч.	62	62
Лабораторные занятия, ч.	х	х
Промежуточная аттестация – экзамен, ч	4	4
Промежуточная аттестация – зачет с оценкой, ч	х	х
Промежуточная аттестация – зачет, ч	х	х
Самостоятельная работа обучающихся, всего ч.	42	42
Общая трудоемкость, ч.	108	108
Общая трудоемкость, з.е.	3	3

АНОО ВО «Университет «Сириус»	Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика»	Лист 3 Листов 9
-------------------------------	--	--------------------

2.2. Структура дисциплины (модуля) по разделам (темам) и видам учебной деятельности:

Наименования разделов (тем) дисциплины (модуля)	Лекционные занятия, ч	Практические (семинарские) занятия, ч	Лабораторные занятия, ч	Промежуточная аттестация, ч	Самостоятельная работа, ч	Всего, ч	Форма текущего контроля / промежуточной аттестации
Раздел 1. Введение. Краткая история дисциплины. Общая постановка задачи оптимизации. Примеры	0	6	0		4	10	Контрольная работа
Раздел 2. Элементарная теория вероятностей	0	8	0		4	12	Контрольная работа
Раздел 3. Общая теория вероятностей	0	8	0		4	12	Контрольная работа
Раздел 4. Метод характеристических функций	0	8	0		4	12	Контрольная работа
Раздел 5. Случайные процессы	0	8	0		6	14	Контрольная работа
Раздел 6. Оценивание параметров распределений	0	6	0		6	12	Контрольная работа
Раздел 7. Линейные статистические модели	0	6	0		6	12	Контрольная работа
Раздел 8. Проверка статистических гипотез	0	6	0		6	12	Контрольная работа
Раздел 9. Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики	0	6	0		2	8	Контрольная работа
Промежуточная аттестация				4		4	Экзамен
Итого	0	62		4	42	108	

АНОО ВО «Университет «Сириус»	Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика»	Лист 4 Листов 9
-------------------------------	--	--------------------

2.3. Содержание разделов (тем) дисциплины (модуля):

Наименования разделов (тем) дисциплины (модуля)	Содержание разделов (тем) дисциплины (модуля)
Раздел 1. Введение. Краткая история дисциплины.	Введение. Краткая история дисциплины. Общая постановка задачи оптимизации. Примеры
Раздел 2. Элементарная теория вероятностей	Элементарная теория вероятностей
Раздел 3. Общая теория вероятностей	Общая теория вероятностей
Раздел 4. Метод характеристических функций	Метод характеристических функций
Раздел 5. Случайные процессы	Случайные процессы, такие как винеровский и пуассоновский
Раздел 6. Оценивание параметров распределений	Точечные и интервальные оценки распределений
Раздел 7. Линейные статистические модели	Линейные статистические модели
Раздел 8. Проверка статистических гипотез	Проверка гипотез с помощью параметрических и непараметрических критериев
Раздел 9. Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики	Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики

2.4. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа предусматривает: самостоятельное изучение теоретического материала, подготовку к ответам на семинарских заданиях, подготовку к текущему контролю и промежуточной аттестации, выполнение тестовых заданий по пройденным темам курса.

3. Текущий контроль и промежуточная аттестация по дисциплине (модулю).

Оценочные материалы

3.1. Текущий контроль успеваемости проводится в течение семестра в следующих формах:

Наименования разделов (тем) дисциплины (модуля)	Форма текущего контроля	Оценочные материалы
Раздел 1. Введение. Краткая история дисциплины. Общая постановка задачи оптимизации. Примеры	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ
Раздел 2. Элементарная теория вероятностей	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ
Раздел 3. Общая теория вероятностей	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ
Раздел 4. Метод характеристических функций	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ
Раздел 5. Случайные процессы	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ

АНОО ВО «Университет «Сириус»	Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика»	Лист 5 Листов 9
-------------------------------	--	--------------------

Раздел 6. Оценивание параметров распределений	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ
Раздел 7. Линейные статистические модели	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ
Раздел 8. Проверка статистических гипотез	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ
Раздел 9. Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики	Контрольные работы	Перечень заданий для контрольных работ

3.2. Оценочные материалы для текущего контроля

Примерный перечень заданий для контрольных работ:

Домашнее задание №1 выдается студентам в одном варианте и состоит из 9 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания - 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания - представленные в письменном виде решения задач.

Задача 1. [1 балл] Найти вероятность того, что дни рождения 8 человек придутся в точности на два месяца, предполагая, что все месяцы равновероятны.

Задача 2. [1 балл] Пусть события A , B и C попарно независимы и $P(C) > 0$. Верно ли, что объединение событий A и B не зависит от события C ?

Задача 3. [1 балл] В схеме Бернулли вероятность успеха равна p . Найти вероятность того, что две неудачи подряд встретятся раньше последовательности из неудачи и успеха подряд.

Задача 4. [1 балл] В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этой урны белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны?

Задача 5. [1 балл] Случайная величина X имеет стандартное экспоненциальное распределение. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $1/X^2$.

Задача 6. [2 балла] Случайные величины X и Y независимы, X имеет биномиальное распределение с параметрами $n=2$, $p=1/2$, Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0;1]$. Найти функцию распределения случайных величин $X+Y$, XY . Являются ли эти распределения абсолютно непрерывными?

Задача 7. [2 балла] Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины e^{X^2} , если случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1;1]$.

Задача 8. [2,5 балла] Найти вероятность того, что в серии из n испытаний Бернулли число успехов дает остаток 1 при делении на 3.

Задача 9. [1,5 балла] Случайная величина X_n принимает значения $-n$, 0 , n с вероятностями $1/2n^2$, $1-1/n^2$, $1/2n^2$. Применим ли к последовательности X_n

АНОО ВО «Университет «Сириус»	Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика»	Лист 6 Листов 9
-------------------------------	--	--------------------

закон больших чисел?

Домашнее задание №2 выдается студентам в одном варианте и состоит из 7 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания - 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания - представленные в письменном виде решения задач.

Задача 1. [1,5 балла] Характеристическая функция случайной величины X равна $\exp(-t^2)/3 + 2\sin(t)/3t$. Найти плотность распределения случайной величины X .

Задача 2. [1,5 балла] Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, характеристическая функция которой равна $(1-it)^{(-p)}(1+it)^{(-q)}$.

Задача 3. [2 балла] Случайные величины X_1, X_2, \dots независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найдите предел среднего геометрического первых n случайных величин.

Задача 4. [2 балла] На улице стоит человек и продает газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей покупает газету с вероятностью $1/3$. Пусть X обозначает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземпляров газеты. С помощью ЦПТ оцените распределение X .

Задача 5. [2,5 балла] X и Y – случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что если с вероятностью 1 $E(X|Y)=Y$ и $E(Y|X)=X$, то $X=Y$ п.н.

Задача 6. [2 балла] Доказать, что если случайные величины $X(0), \dots, X(n)$ образуют цепь Маркова, то случайные величины $Y(k)=X(n-k)$ также образуют цепь Маркова.

Задача 7. [1,5 балла] Игральная кость последовательно перекладывается с одной грани равномерно на любую из четырех соседних независимо от предыдущего. К какому пределу стремится вероятность того, что при n -м перекладывании кость окажется на грани «6», если сначала она находилась в этом же положении?

Домашнее задание №3 выдается студентам в одном варианте и состоит из 9 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания - 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания - представленные в письменном виде решения задач.

В задачах 1-8 X_1, \dots, X_n – выборка из распределения Пуассона с параметром a .

Задача 1. [1,5 балла] Найти оценку метода моментов (ОММ) параметра a .

Задача 2. [1,5 балла] Найти оценку максимального правдоподобия

АНОО ВО «Университет «Сириус»	Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика»	Лист 7 Листов 9
-------------------------------	--	--------------------

параметра a .

Задача 3. [1,5 балла] Проверить ОММ на несмещенность.

Задача 4. [1,5 балла] Проверить ОММ на состоятельность.

Задача 5. [1,5 балла] Проверить ОММ на асимптотическую нормальность.

Задача 6. [2 балла] Является ли выборочное среднее достаточной статистикой?

Задача 7. [2,5 балла] Является ли выборочное среднее полной статистикой?

Задача 8. [1,5 балла] Найти эффективную несмещенную оценку параметра a .

Задача 9. [2,5 балла] Результаты замеров координаты $a(t)$ движущейся равномерно и прямолинейно точки в моменты $t=1,2,3,4,5$ оказались соответственно равны: 12,98; 13,05; 13,32; 14,22; 13,97. Предполагая погрешности измерений независимыми и нормальными с нулевым средним, построить 0,95-доверительный эллипс для точки $(a(0), v)$, где v – скорость точки.

Домашнее задание №4 выдается студентам в одном варианте и состоит из 6 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания – 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания – представленные в письменном виде решения задач.

Задача 1. [1,5 балла] Цифры 0, 1, 2, ..., 9 среди 800 первых десятичных знаков числа π появились 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 раз соответственно. Проверить гипотезу о согласии этих данных с равномерным на множестве $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ распределением.

Задача 2. [1,5 балла] При переписи населения Англии и Уэльса в 1901 г. было зарегистрировано 15729000 мужчин и 16799000 женщин; 3497 мужчин и 3072 женщин были зарегистрированы как глухонемые от рождения. Проверить гипотезу о независимости глухонемоты от пола.

Задача 3. [1 балл] Построить алгоритм моделирования распределения Коши.

Задача 4. [3 балла] Реализовать алгоритм Метрополиса-Гастингса.

Задача 5. [3 балла] Реализовать EM-алгоритм.

Задача 6. [3 балла] Реализовать критерий Харке-Бера согласия с нормальным распределением.

3.3. Формой промежуточной аттестации является экзамен.

3.4. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

Перечень вопросов для подготовки к экзамену:

1. Характеристическая функция.
2. Характеристическая функция нормального распределения.
3. Теоремы о связи между математическим ожиданием и характеристической функцией.

4. Формула обращения.

5. Следствия формулы обращения. Сумма независимых нормальных случайных величин.

6. Теорема о свойствах, равносильных сходимости по распределению.

7. Равномерная сходимость к непрерывной функции распределения.

8. Центральная предельная теорема в форме Леви.

9. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

10. Центральная предельная теорема в форме Линденберга (без доказательства). Центральная предельная теорема в форме Ляпунова. Оценки на скорость сходимости.

11. Условные математические ожидания. Существование и единственность.

12. Свойства условных математических ожиданий.

13. Математическое ожидание суммы случайного количества случайных величин. Мартингалы.

15. Случайные процессы. Траектории.

16. Марковские цепи. Вероятность фиксированной траектории. Теорема существования (без доказательства).

17. Марковские цепи. Распределение положений на n -м шаге. Стационарное распределение. Теорема Маркова.

18. Классификация состояний цепи Маркова. Критерий возвратности. Теорема солидарности.

19. Случайные блуждания по целым точкам прямой и на целочисленной решетке. Теорема Пойя о возвращении.

20. Ветвящиеся процессы. Вероятность вырождения и скорость вырождения в критическом случае.

4. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

4.1. Перечень основной литературы:

1. Теория вероятностей с примерами и задачами: Учебное пособие / Ананьевский С.М., Невзоров В.Б. - СПб:СПбГУ, 2013. - 240 с

4.2. Перечень дополнительной литературы:

Теория вероятностей и математическая статистика: учебник/Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-е изд., испр. и перераб. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2018.

АНОО ВО «Университет «Сириус»	Рабочая программа дисциплины (модуля) «Теория вероятностей и математическая статистика»	Лист 9 Листов 9
-------------------------------	--	--------------------

5. Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины (модуля)

5.1. Материально-техническое обеспечение:

Вид аудитории	Технические средства и оборудование
<i>Учебная аудитория для проведения промежуточной аттестации</i>	Альфа 5.1 - учебная аудитория для проведения учебных занятий, предусмотренных программой магистратуры. Доска магнитно-маркерная поворотная BoardSYS Twist 100x160 ПО-15Ф 1 шт. Флипчарт 70*100 на роликах 1 шт. Стол-кафедра 1 шт. Стол аудиторный 1 шт. Столы-трансформеры Summa GA ученические 25 шт. Стулья на колесах ученические 25 шт. Ноутбук HP 1 шт. Интерактивная панель NexTouch Nextpanel 86” 1 шт. Радиосистема Arthur Forty U-9700C PSC (UHF) в комплекте. Акустическая система Behringer B215D 2 шт. Веб-камера 4К с технологией искусственного интеллекта JazzTel JT-Vintage-4K 1 шт. Комплект электронных презентаций.
<i>Учебная аудитория для проведения практических занятий – Компьютерный класс</i>	Бета 3.3-3.4 – учебная аудитория для проведения практических занятий (компьютерный класс). Доска магнитно-маркерная поворотная BoardSYS Twist 100x160 ПО-15Ф 1 шт. Флипчарт 70*100 на роликах 1 шт. Стол преподавателя аудиторный 1 шт. Столы и стулья ученические 30 шт. Компьютеры Lenovo ThinkCentre M920s SFF в комплекте с мониторами ПУАМА 27” и периферией – 30 шт. Интерактивная панель NexTouch Nextpanel 86” 1 шт. Радиосистема Arthur Forty U-9700C PSC (UHF) в комплекте. Акустическая система Behringer B215D 2 шт. Веб-камера 4К с технологией искусственного интеллекта JazzTel JT-Vintage-4K 1 шт. Комплект электронных презентаций.

5.2. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе российского производства: не предусмотрено.